

ძვირფასო სტუდენტებო,
 დავალების შესრულების დაწყებამდე,
 გთხოვთ, ჯერ გაეცნოთ განმარტებით წერილს

მათემატიკა ეკონომიკისა და ბიზნესისათვის 1

დავალება № 12. ფუნქციის ზღვარი და უწყვეტობა(ნაწილი პირველი).

ქვემოთ მოყვანილ ცხრილში მოცემული სავარჯიშოები აღებულია სილაბუსში მითითებული [2] სალექციო კურსიდან, კერძოდ, ლექცია 12-ის ბოლო პუნქტში მოყვანილი სავარჯიშოებიდან. გამუქებულია იმ ტიპური სავარჯიშოების ნომრები, რომელთა ამოხსნები გადმოცემულია აქ. გაეცანით ამ ამოხსნებს, დანარჩენი სავარჯიშოები კი შეასრულეთ დამოუკიდებლად.

სავარჯიშოების პირობები და პასუხები იხილეთ [2]-ში.

სავარჯიშოები №

1- ა,ბ,გ,ზ,ი,ლ	1- ე,თ,კ,მ,ნ	2- ა,ე,ზ,თ	2- ბ,ვ,თ,ი,მ,ნ	4	5	6	7	8	9	10
11- ა,გ,ზ	11- ბ,დ,ე,ვ,თ	12	13							

ტიპური სავარჯიშოების ამოხსნა

გამოთვალეთ ზღვრები:

1-ა.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 5)$$

ამოხსნა.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x + 5) = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + \lim_{x \rightarrow 1} 5 = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$$

პასუხი. 4

1-ბ.

$$\lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5)$$

ამოხსნა.

$$\lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 5) = \sqrt[3]{8^2} - 2\sqrt{8} + 5 = 9 - 4\sqrt{2}$$

პასუხი. $9 - 4\sqrt{2}$

1-გ.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2}$$

ამოხსნა.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^2 - 3}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 3)(x^2 - 1)}{(x - 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 3)(x - 1)(x + 1)}{(x - 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + 3)(x + 1)}{x - 2} = -8$$

პასუხი. -8

1-ზ.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x + 1}{\frac{1}{3}x + 2}$$

ამოხსნა.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{x + 1}{\frac{1}{3}x + 2} = \frac{\frac{1}{3} + 1}{\frac{1}{3} + 2} = \frac{4}{7}$$

პასუხი. $\frac{4}{7}$

1-ი.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x + 3}{5 - x}$$

ამოხსნა.

რადგან $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - x}{x + 3} = 0$, ამიტომ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x + 3}{5 - x} = \infty$

პასუხი. ∞

1-ღ.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ამოხსნა.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

პასუხი. 2

გამოთვალეთ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$:

2-ა.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - 4$$

ამოხსნა.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 - 4x^2 - 4) = \infty, \text{ რადგან } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{t}\right), \text{ ხოლო}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{x^3} - \frac{4}{x^2} - 4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{1 - 4x - 4x^3} = 0$$

პასუხი. ∞

2-ე.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 5x + 1}$$

ამოხსნა.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{2x^2 + 5x + 1} = \frac{1}{2}, \text{ რადგან } \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 3}{\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x + 3x^2}{2 + 5x + x^2} = \frac{1}{2}$$

პასუხი. $\frac{1}{2}$

2-ზ.

$$f(x) = \frac{2x + 1}{3x^2 + 2x - 7}$$

ამოხსნა.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{3x^2 + 2x - 7} = 0, \text{ რადგან } \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{x} + 1}{\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x} - 7} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2}{3 + 2x - 7x^2} = 0$$

პასუხი. 0

2-თ.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{1 - 2x - x^3}$$

ამოხსნა.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 5}{1 - 2x - x^3} = 0, \text{ რადგან } \lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 5}{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x - 5x^2) \cdot x}{x^3 - 2x^2 - 1} = 0$$

პასუხი. 0

4.

კვლევების მიხედვით დგინდება, რომ გარკვეული ქვეყნის მოსახლეობის რაოდენობა t წლის შემდეგ იქნება $p = 0.2t + 1500$ ათასი, ხოლო ამავე ქვეყნის მთლიანი შიდა შემოსავალი კი E მილიონი დოლარი, სადაც

$$E(t) = \sqrt{9t^2 + 0.5t + 179}.$$

ა) გამოსახეთ ერთ სულ მოსახლეზე მთლიანი შემოსავლის $P = E/p$ ფუნქცია, როგორც დროის t ცვლადის ფუნქცია;

ბ) რა მოდის ერთ სულ მოსახლეზე მთლიან შემოსავალს გრძელვადიან პერიოდში (ანუ, როცა $t \rightarrow \infty$)?

ამოხსნა.

ა) $P(t) = \frac{\sqrt{9t^2 + 0.5t + 179}}{0.2t + 1500}$

ბ) $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9t^2 + 0.5t + 179}}{0.2t + 1500} = 15$, რადგან $\lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\frac{9}{t^2} + \frac{0.5}{t} + 179}}{\frac{0.2}{t} + 1500} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + 0.5t + 179t^2}}{0.2 + 1500t} = 15$

პასუხი. ა) $P(t) = \frac{\sqrt{9t^2 + 0.5t + 179}}{0.2t + 1500}$

ბ) 15

7. სკეიტბორდის მწარმოებელი კომპანიის ყოველდღიური ფიქსირებული დანახარჯი შეადგენს 200 ლარს, ხოლო დღეში 20 ერთეული სკეიტბორდის დასამზადებლად მთლიანი დანახარჯი კი – 3800 ლარს.

ა) შეადგინეთ ყოველდღიური მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია $C(x)$, თუ ის წრფივია დღიურად გამოშვებული პროდუქციის x რაოდენობის მიმართ;

ბ) x რაოდენობა სკეიტის გამოშვებისას საშუალო დანახარჯის ფუნქცია $\bar{C}(x)$, განისაზღვრება შემდეგი ფორმულით: $\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$. იპოვეთ ეს ფუნქცია და ააგეთ მისი გრაფიკი ასიმპტოტების ჩვენებით, როცა $1 \leq x \leq 30$;

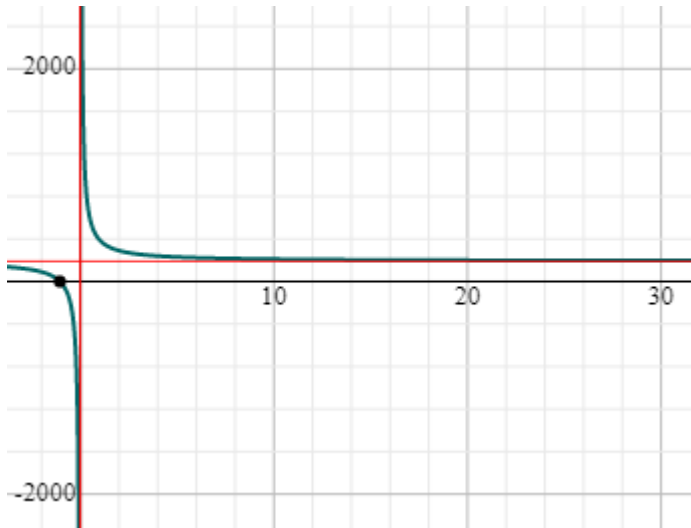
გ) საითკენ მიისწრაფის საშუალო დანახარჯის მნიშვნელობა, როცა გამოშვებული სკეიტების რაოდენობა იზრდება?

ამოხსნა. ა) ვინაიდან 20 სკეიტბორდის დასამზადებლად ერთ დღეში დაიხარჯა 3800 ლარი, ამიტომ ერთი სკეიტბორდისთვის დახარჯული თანხა არის $3800/20 = 190$ ლარი. რადგან ყოველდღიური მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია $C(x)$ წრფივია დღიურად გამოშვებული პროდუქციის x რაოდენობის მიმართ, ამიტომ გვექნება $C(x) = 200 + 190x$

ბ) წინა პუნქტის გათვალისწინებით, გვექნება $\bar{C}(x) = \frac{200 + 190x}{x}$. ამ ფუნქციის ვერტიკალური ასიმპტოტია $x = 0$ წრფე, ხოლო ჰორიზონტალური ასიმპტოტის საპოვნელად უნდა ვიპოვოთ

შემდეგი ზღვარი: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{200 + 190x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{200 + 190 \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (200x + 190) = \lim_{x \rightarrow 0} (200x) +$

$190 = 190$. ამრიგად, ჰორიზონტალური ასიმპტოტია $y = 190$ წრფე.



გ) როცა გამოშვებული სკვიტების რაოდენობა იზრდება, ანუ როცა $x \rightarrow \infty$ -კენ, მაშინ, როგორც ბ) პუნქტში დავთვალეთ, საშუალო დანახარჯის მნიშვნელობა მიისწრაფის ჰორიზონტალური ასიმპტოტისკენ, ანუ 190-კენ.

პასუხი. ა) $C(x) = 200 + 190x$; ბ) $x = 0$ და $y = 190$; გ) $\lim_{x \rightarrow \infty} \overline{C(x)} = 190$.

10. დადგენილია, რომ ქალაქის მოსახლეობის რაოდენობა P (ათასებში) მომდევნო t წლის განმავლობაში მოდელირდება ფორმულით:

$$P(t) = 20 - \frac{7}{t+2}.$$

ამასთანავე, ეკოლოგებმა გამოიკვლიეს, რომ ატმოსფეროში ნახშირბადის მონოქსიდის საშუალო დონე P ათას მოსახლეობაზე იქნება c მეგილიონედი, სადაც

$$c(P) = 0.4\sqrt{P^2 + P + 21}.$$

რა მოსდის ჰაერის დაბინძურების c დონეს გრძელვადიან პერიოდში (როცა $t \rightarrow \infty$)?

ამოხსნა. ცხადია ჩვენ უნდა გამოვთვალოთ ზღვარი

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(P(t)) = c\left(\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)\right).$$

$$\text{ჯერ ვიპოვოთ ზღვარი } \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(20 - \frac{7}{t+2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(20 - \frac{7}{\frac{1}{t}+2}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(20 - \frac{7t}{1+2t}\right) = 20 -$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{7t}{1+2t}\right) = 20 - \frac{7 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} t}{1+2 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} t} = 20.$$

$$\text{ამრიგად, გვექნება } \lim_{t \rightarrow \infty} c(P(t)) = c(20) = 0.4\sqrt{20^2 + 20 + 21} = 0.4 \cdot 21 = 8.4.$$

$$\text{პასუხი. } \lim_{t \rightarrow \infty} c(P(t)) = 8.4$$

$$11 \text{ ვთქვათ } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = 5 \text{ და } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -2 \text{ და } \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 4$$

იპოვეთ:

$$\text{ა. } \lim_{x \rightarrow c} [2f(x) - 3g(x)].$$

$$\begin{aligned} \text{ამოხსნა. } \lim_{x \rightarrow c} [2f(x) - 3g(x)] &= \lim_{x \rightarrow c} [2f(x)] - \lim_{x \rightarrow c} [3g(x)] = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow c} [f(x)] - 3 \lim_{x \rightarrow c} [g(x)] = 2 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) = 10 + 6 = 16 \end{aligned}$$

პასუხი. 16

11-გ. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x) + g(x)}$.

ამოხსნა. $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x) + g(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)]} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow c} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow c} [g(x)]} = \sqrt{5 - 2} = \sqrt{3}$

პასუხი. $\sqrt{3}$

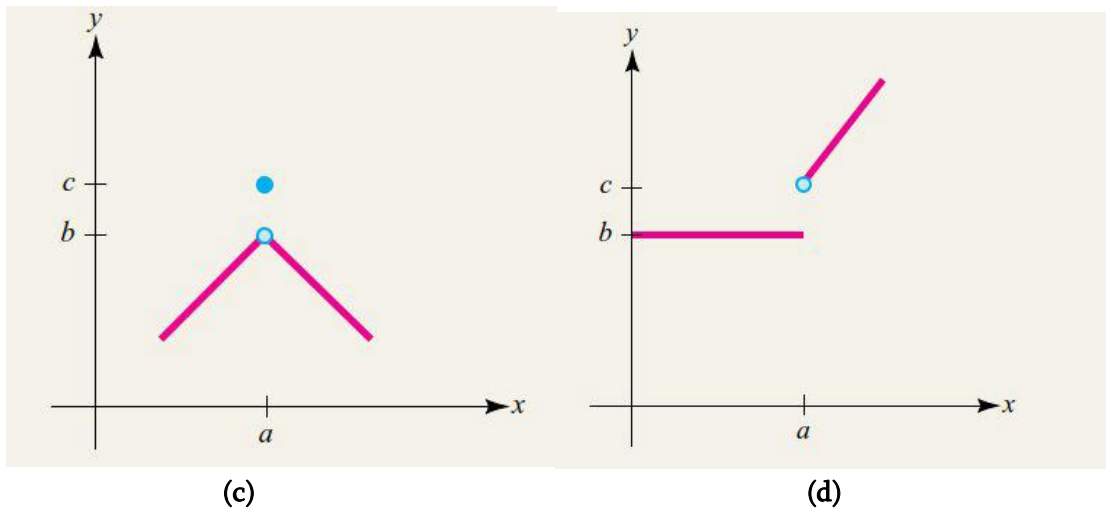
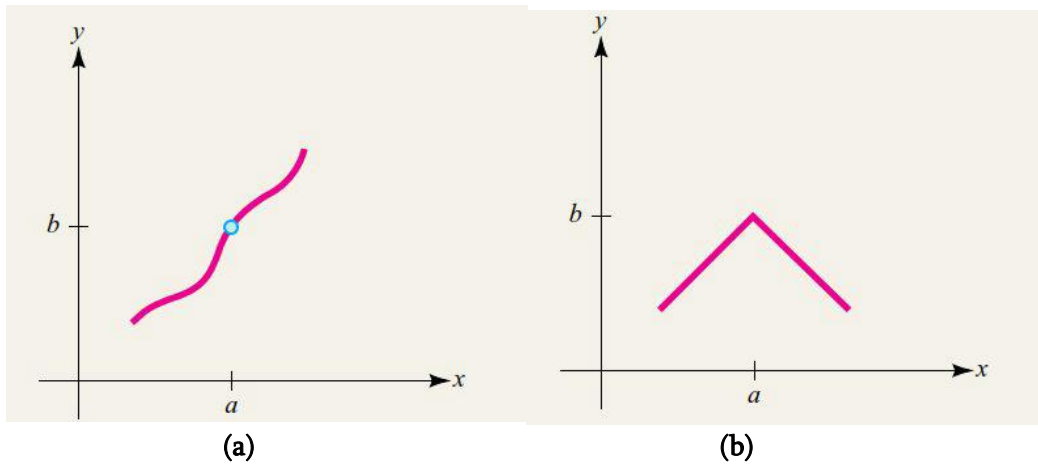
11-ზ. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) + g(x)}{x + f(x)}$

ამოხსნა. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) + g(x)}{x + f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(\frac{1}{x}) + g(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x} + f(\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[2f(\frac{1}{x}) + g(\frac{1}{x})]}{1 + xf(\frac{1}{x})} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x[2f(\frac{1}{x}) + g(\frac{1}{x})]}{\lim_{x \rightarrow 0} [1 + xf(\frac{1}{x})]} =$

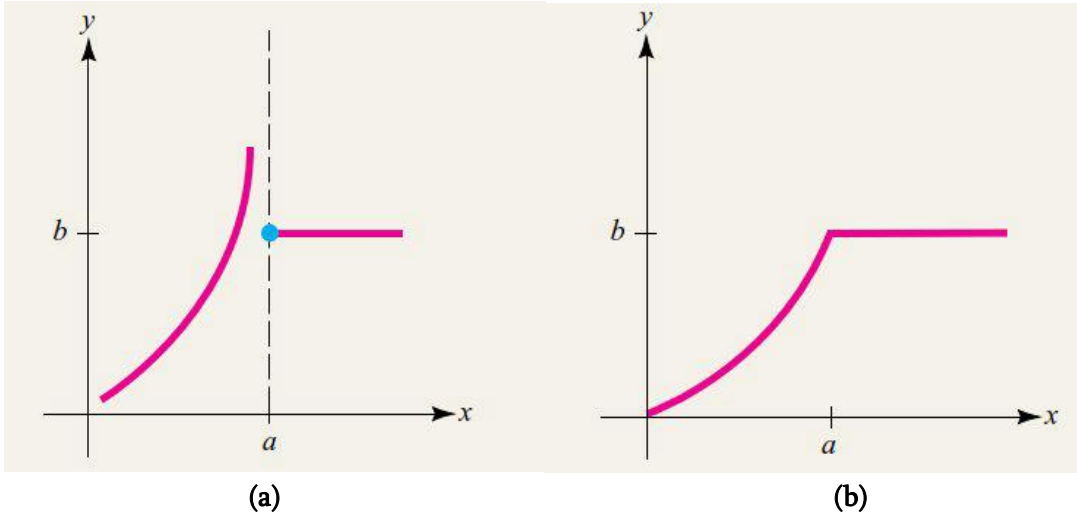
$\frac{\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} [2f(\frac{1}{x}) + g(\frac{1}{x})]}{1 + \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} f(\frac{1}{x})} = \frac{0 \cdot [2(-3) + 4]}{1 + 0 \cdot (-3)} = 0$

პასუხი. 0

12. სურ 11.19 და სურ 11.20-ზე გამოსახული გრაფიკების ესკიზებიდან გამოიკვლიეთ $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ზღვრის არსებობის საკითხი.



სურ 11.19



სურ 11.20

ამოხსნა.

11.19 (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, რადგანაც $f(x)$ ფუნქციის როგორც მარცხენა ასევე მარჯვენა ზღვრები a წერტილში b -ს ტოლია.

(b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, რადგანაც $f(x)$ ფუნქციის როგორც მარცხენა ასევე მარჯვენა ზღვრები a წერტილში b -ს ტოლია.

(c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, რადგანაც $f(x)$ ფუნქციის როგორც მარცხენა ასევე მარჯვენა ზღვრები a წერტილში b -ს ტოლია.

(d) როგორც ნახაზიდან ჩანს, $f(x)$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი a წერტილში b -ს ტოლია, ხოლო მარჯვენა ზღვარი- c -სი. ვინაიდან $b \neq c$ ამიტომ ფუნქციის ზღვარი მოცემულ წერტილში არ არსებობს.

11.20 (a) როგორც ნახაზიდან ჩანს, $f(x)$ ფუნქციის მარცხენა ზღვარი a წერტილში არ არსებოს, ამიტომ ფუნქციის ზღვარიც მოცემულ წერტილში არ იარსებებს.

(b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, რადგანაც $f(x)$ ფუნქციის როგორც მარცხენა ასევე მარჯვენა ზღვრები a წერტილში b -ს ტოლია.

პასუხი. **11.19** (a) - b , (b) - b , (c) - b , (d) - არ არსებობს.

11.20 (a) - b , (b) - არ არსებობს.